2.7.5 Racionální a polynomické funkce

Předpoklady: 2704

Pedagogická poznámka: Při opisování definic racionální a polynomické funkce si někteří studenti stěžovali, že je to příliš těžké. Ve skutečnosti je systém, kterým jsou funkce popisovány, velmi jednoduchý a kromě toho, že přepsání chvíli trvá, na tom není nic těžkého.
Došlo mně, že problémy souvisí s tím, jak žáci definice čtou a že většinou vůbec nevnímají jejich smysl.
Definice polynomické a racionální funkce proto používám jako nácvik čtení s okamžitou interpretací. Ukáži zadání s definicí na 30-40 sekund s tím, že si je žáci mají prohlédnout a pochopit tak, aby byli schopni ji správně napsat. Rozebereme zapsání první definice a zkusíme to samé s druhou.

Některé druhy funkcí se dají řadit do skupin. Mezi takové skupiny patří skupiny funkcí racionálních a polynomických.
Obě definice jsou často opisovány zcela bez pochopení. V takovém případě je prakticky nemožné se je naučit tak, aby mohly být správně zopakovány (všechno se plete navzájem).
Zkusíme se naučit je číst tak, abychom si dokázali jejich znění interpretovat a pak i bez chyb napsat.

Př. 1: 30 až 40 sekund studuj znění definice polynomické funkce tak, abys ho poté mohl zapsat zpaměti.
"**Polynomická funkce** je každá funkce ve tvaru $y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$, kde x je proměnná, čísla $a_m; a_{m-1}; ... a_1; a_0$ jsou reálná a m je číslo přirozené."

Začátek: Polynomická funkce je každá funkce ve tvaru...
Tvar funkce: čím dále menší mocniny x s koeficientem, který má odpovídající index $\Rightarrow$
$y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$.
Významy písmen:

- x je proměnná,
- čísla $a_m; a_{m-1}; ... a_1; a_0$ jsou koeficienty před mocninami $\Rightarrow$ proto reálná čísla,
- m je exponent v mocnině $\Rightarrow$ přirozené číslo.

Polynomická funkce je každá funkce ve tvaru $y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$, kde x je proměnná, čísla $a_m; a_{m-1}; ... a_1; a_0$ jsou reálná a m je číslo přirozené.

Př. 2: 20 až 30 sekund studuj znění definice racionální funkce tak, abys ho poté mohl zapsat zpaměti.
" **Racionální funkce** je každá funkce ve tvaru $y = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... b_1 x + b_0}$,
kde x je proměnná, čísla $a_m; a_{m-1}; ... a_1; a_0; b_n; b_{n-1}; ... b_1; b_0$ jsou reálná a m, n jsou čísla přirozená."

Začátek: Racionální funkce je každá funkce ve tvaru...

Tvar funkce: Zlomek s jedním polynomem v čitateli a druhým ve jmenovateli, oba mají různou nejvyšší mocninu: $y=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...b_1 x + b_0}$.

Významy písmen:

- x je proměnná,
- čísla $a_m; a_{m-1};...a_1; a_0; b_n; b_{n-1};...b_1; b_0$ jsou koeficienty před mocninami $\Rightarrow$ proto reálná čísla,
- m, n jsou exponenty v mocninách $\Rightarrow$ přirozená čísla.

Racionální funkce je každá funkce ve tvaru $y=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...b_1 x + b_0}$, kde x je proměnná, čísla $a_m; a_{m-1};...a_1; a_0; b_n; b_{n-1};...b_1; b_0$ jsou reálná a m, n jsou čísla přirozená.

Pedagogická poznámka: Během opisování definic se ukáže, zda si studenti alespoň přibližně pamatují systém pro popisování polynomů z prvního ročníku. Pokud se vůbec neorientují, je třeba se k tomu vrátit (hodina 1704) a obětovat kreslení funkcí.

Př. 3: Rozhodni, jaký je definiční obor polynomických a racionálních funkcí.

Definiční obor: Všechna x, která můžeme dosadit do předpisu funkce.

- **Polynomické funkce:** Předpis je sestaven z přirozených mocnin x. Do přirozených mocnin můžeme dosadit za x libovolné číslo $\Rightarrow$ pro polynomickou funkci platí $D(f)=R$.
- **Racionální funkce:** Předpis je sestaven z podílu dvou polynomických funkcí. Obě funkce mají definiční obor R. Nemůžeme dělit nulou $\Rightarrow$ definičním oborem je tedy množina všech reálných čísel, kromě takových x, pro která je hodnota polynomu ve jmenovateli rovna nule $\Rightarrow$ pro racionální funkci platí $D(f)=R-A$, kde A je množina všech kořenů rovnice $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...b_1 x + b_0 = 0$.

Pedagogická poznámka: Studenti u definičního oboru racionálních funkcí tradičně navrhují nulu. Je třeba jim ukázat, že nevadí nula dosazená za x, ale nula ve jmenovateli zlomku, což není to samé. Jinak jde o dobrou ukázku ukvapeného uvažování.

Př. 4: Rozhodni, jaký je vztah mezi racionálními a polynomickými funkcemi (zda je jedna z množin podskupinou druhé, zda mají množiny prázdný průnik apod.).

Předpis racionální funkce je sestaven z podílu dvou polynomických funkcí. Pokud bude polynom ve jmenovateli roven 1, zbude pouze polynom v čitateli. Polynomické funkce jsou tedy podmnožinou racionálních funkcí, pro které platí $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...b_1 x + b_0 = 1$ (přesněji $b_n = b_{n-1} = ... = b_1 = 0; b_0 = 1$).

Př. 5: Doplň následující tabulku s přehledem dosud probraných funkcí:

Název funkce	**předpis**	**předpis podle definice polynomické a racionální funkce**	**patří mezi**

	$y = a$		
		$y = a_1 x + a_0$	
	$y = a\lvert x-b\rvert + c$		X
kvadratická			polynomické a racionální
lineární lomená			
mocninná s přirozeným exponentem	$y = x^n$, $n > 0$		
		$y = \frac{1}{x^n}$	

Probrali jsme zatím tyto funkce:

Název funkce	**předpis**	**předpis podle definice polynomické a racionální funkce**	**patří mezi**
konstantní	$y = a$	$y = a_0$	polynomické a racionální
lineární	$y = ax + b$	$y = a_1 x + a_0$	polynomické a racionální
s absolutní hodnotou	$y = a\lvert x-b\rvert + c$	X	X
kvadratická	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	polynomické a racionální
lineární lomená	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$	racionální
mocninná s přirozeným exponentem	$y = x^n$, $n > 0$	$y = x^n$	polynomické a racionální
mocninná s celým záporným exponentem	$y = x^n$ $n < 0$	$y = \frac{1}{x^n}$	racionální

Pedagogická poznámka: Ukazuji po chvilce studentům první řádek, aby měli lepší představu o tom, co se po nich chce.

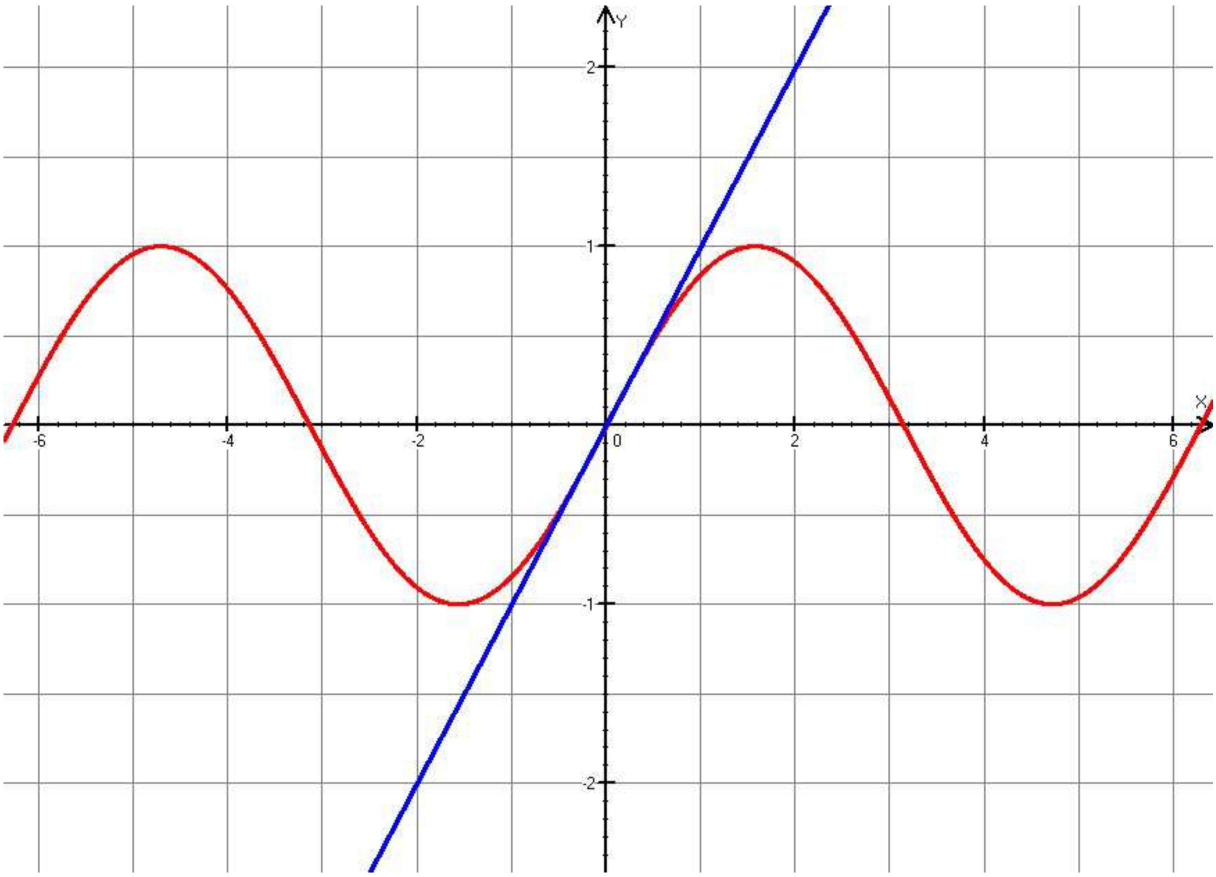
Polynomické funkce mají značný význam:

- Mají definiční obor $R \Rightarrow$ nemusíme se starat o podmínky.
- Nejsou přetržené a nemají ostré rohy (velká výhoda ve fyzice při zkoumání jejich změn).
- Jejich hodnoty se snadno se vyčíslují.
- S jejich pomocí můžeme vyjadřovat ostatní funkce (takzvaný Taylorův rozvoj).

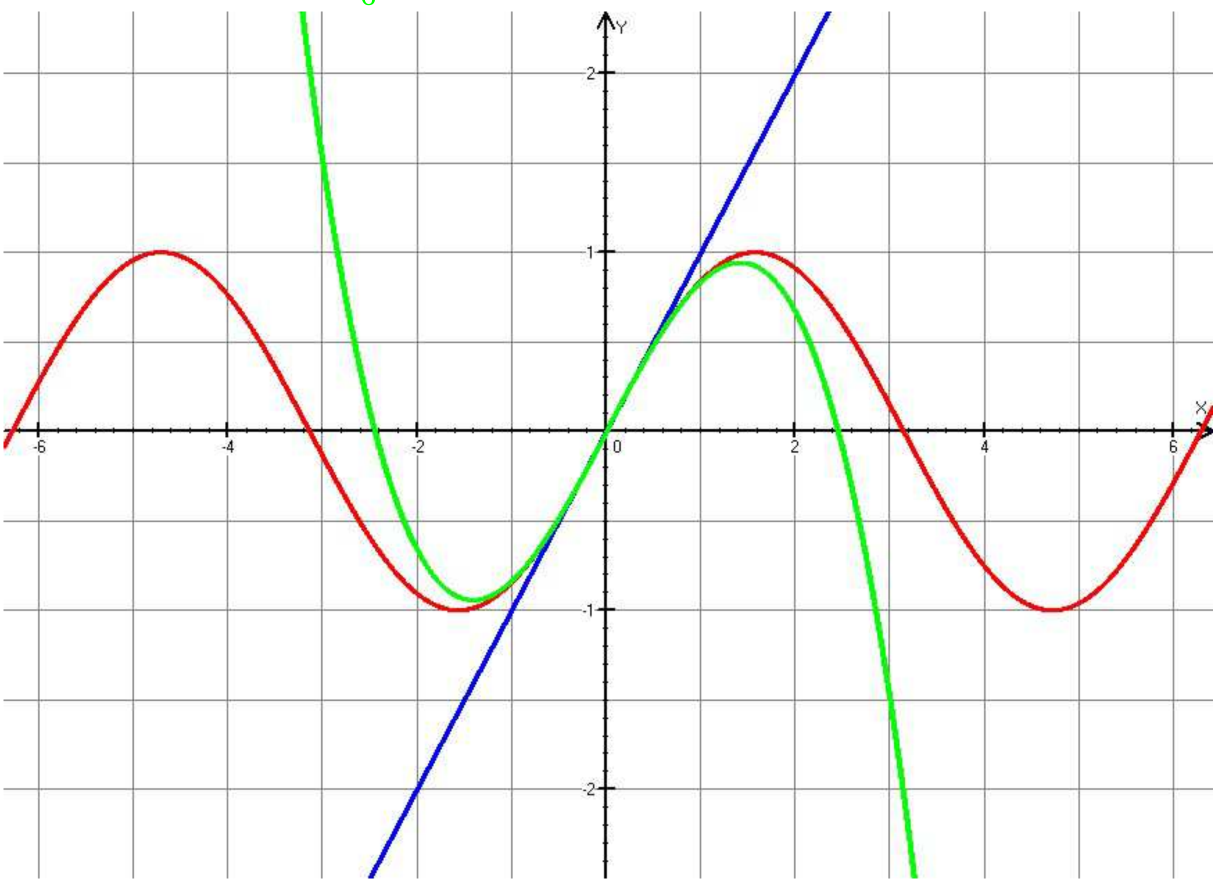
Taylorův rozvoj je řada polynomických funkcí se zvětšujícím se řádem, která se zvětšující se přesností aproximuje hodnoty jiné funkce v okolí nějakého bodu.

Příklad: aproximace funkce $\sin x$ **v okolí bodu 0.**

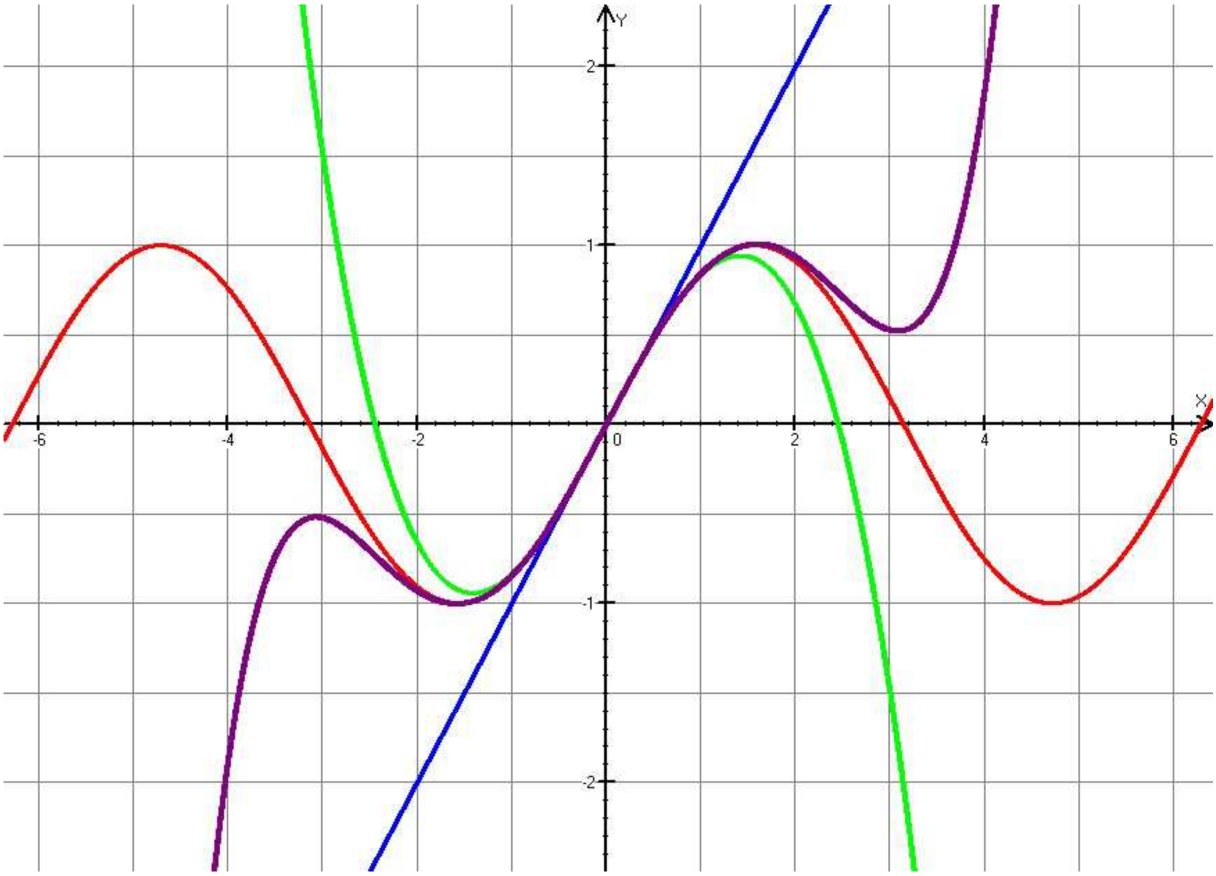
$y = \sin x$, $y_1 = x$



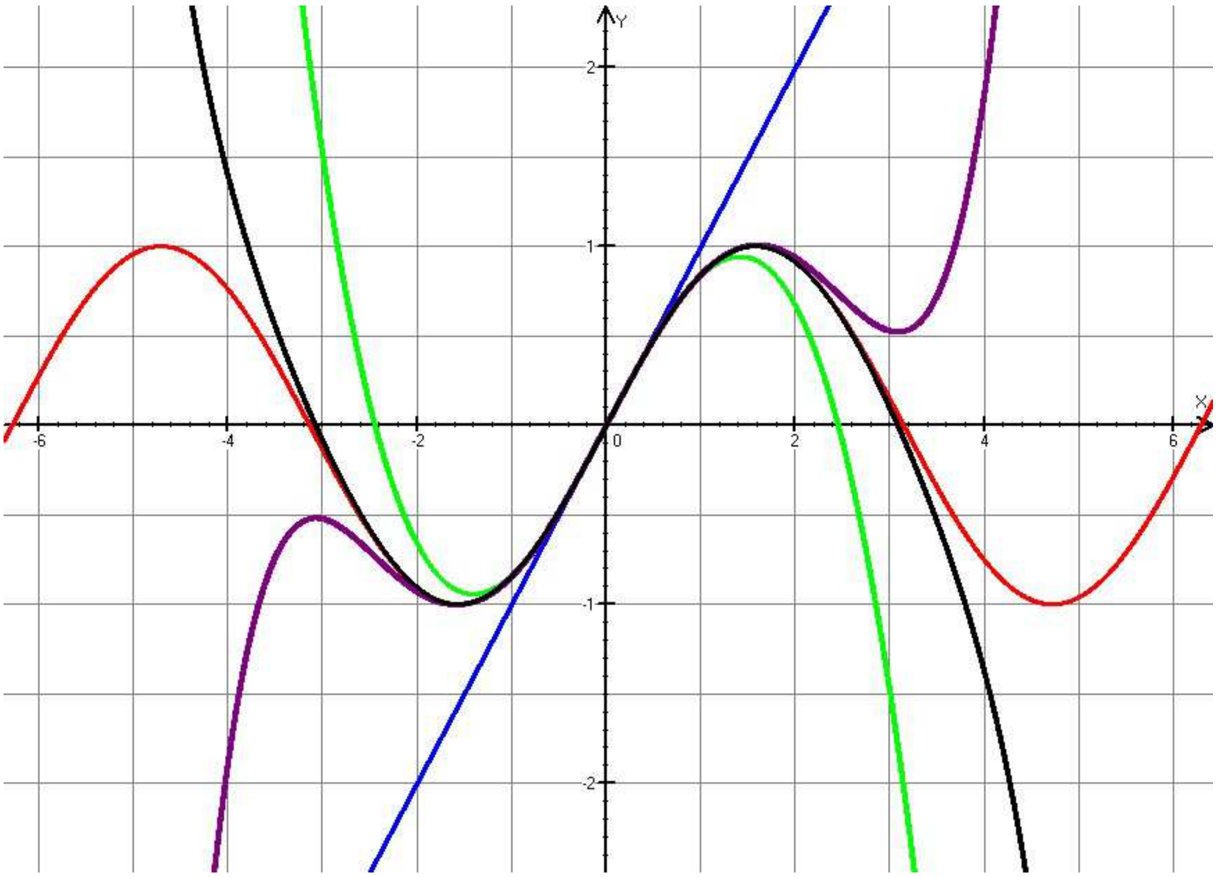
$y = \sin x$, $y_1 = x$, $y_3 = x - \dfrac{x^3}{6}$



$y = \sin x$, $y_1 = x$, $y_3 = x - \dfrac{x^3}{6}$, $y_5 = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$



$y = \sin x$, $y_1 = x$, $y_3 = x - \dfrac{x^3}{6}$, $y_5 = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $y_7 = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$



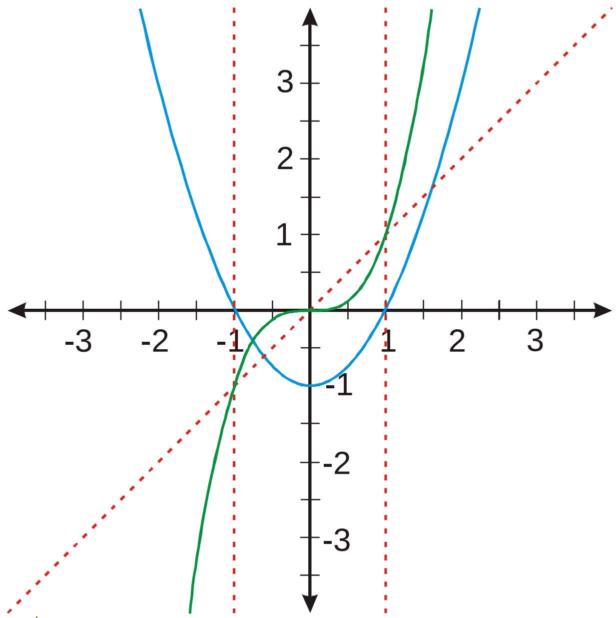
Z obrázků je dobře vidět, jak je graf funkce $y = \sin x$ čím dál lépe aproximován pomocí vyššího Taylorova polynomu.

Grafy složitějších racionálních nebo polynomických funkcí nedokážeme nakreslit obecně pomocí dosavadních metod. V některých případech je možné tvar funkce přibližně odhadnout.

Pedagogická poznámka: Následující příklad studenti až na výjimky samostatně nevyřeší. Řešíme ho tedy společně na tabuli s tím, že se snažím jim dávat co nejvíce šancí, aby se trhli a pokračovali dál sami. Jinak u obou následujících příkladů studentům připomínám, že jde o relativně náročné úlohy, které přesahují rámec toho, co by se měli povinně naučit.

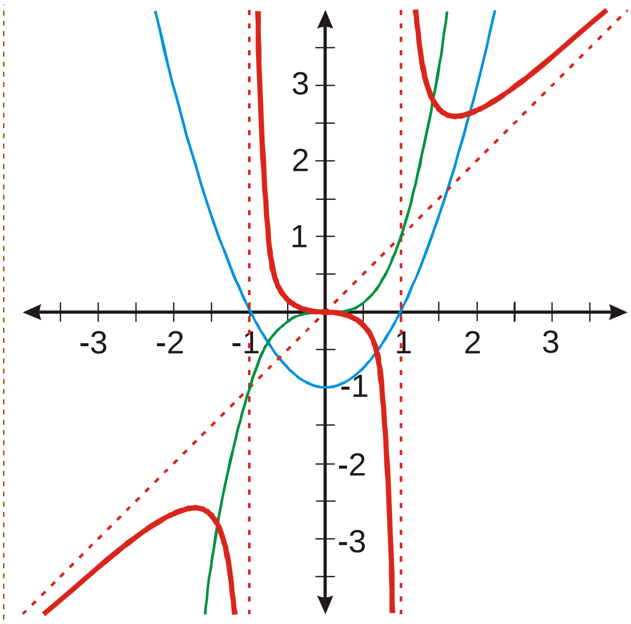
Př. 6: Nakresli přibližný tvar grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Do obrázku nakreslíme grafy funkcí $y = x^3$ a $y = x^2 - 1$. Hodnoty grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ budeme získávat dělením hodnot funkcí $y = x^3$ a $y = x^2 - 1$.

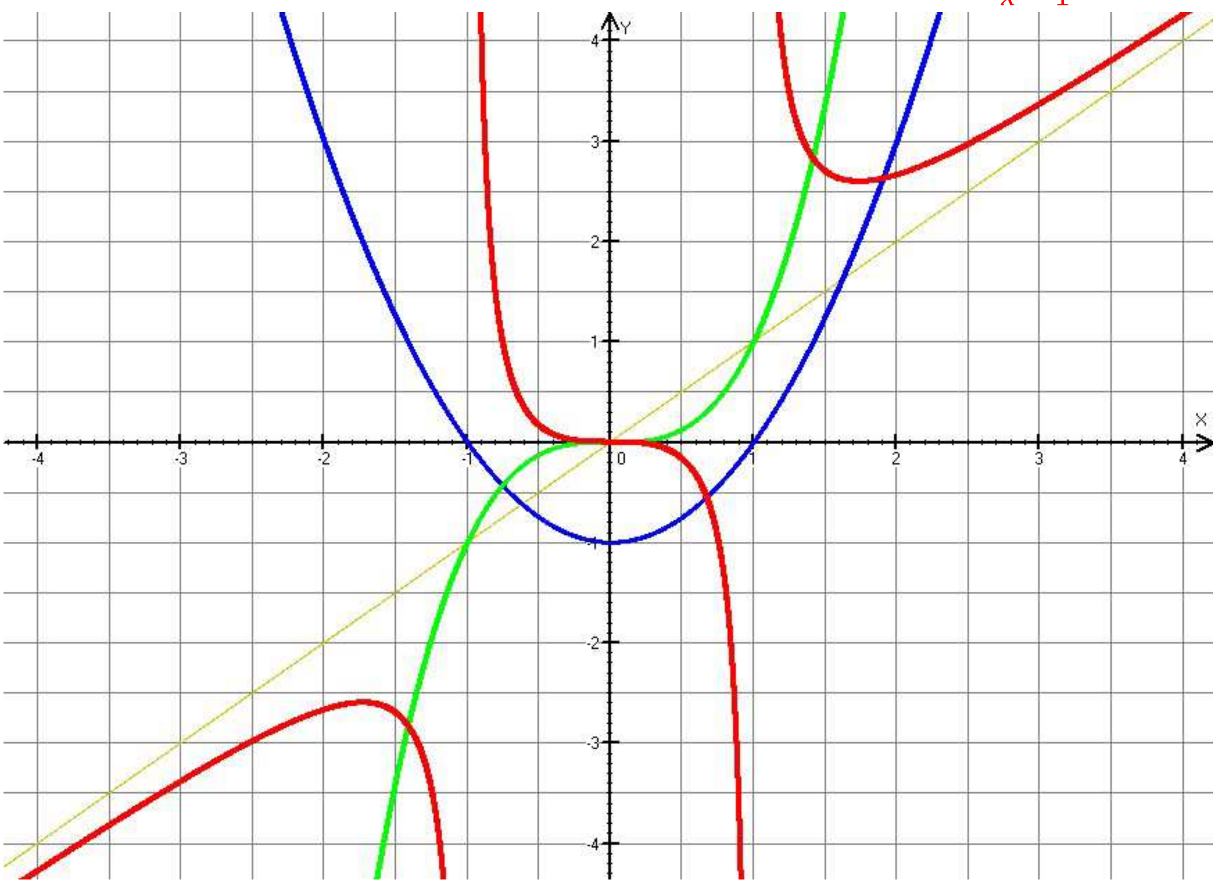


- Funkce $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ nebude mít žádnou hodnotu pro $x = 1$ a $x = -1$ (dělili bychom nulou).
- Pro velká *x* je možné číslo 1 ve jmenovateli zlomku zanedbat a přibližně platí $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1} \doteq \dfrac{x^3}{x^2} = x \Rightarrow$ funkce se bude chovat podobně jako funkce $y = x$.
- Pokud určujeme hodnoty pro *x* větší ale blízká 1, dělíme číslo větší než 1 číslem čím dál více se blížícím 0 $\Rightarrow$ získáme tak čím dál větší hodnoty *y*.
- Pomocí dvou předchozích úvah získáme hodnoty funkce i pro $x \in (-\infty; -1)$.
- Pro $x = 0$ získáme hodnotu $y = 0$.
- Když zvětšujeme hodnotu *x* postupně od nuly k jedničce, dělíme kladné číslo, které se zvětšuje od 0 k 1, záporným číslem, které se zvětšuje od –1 k nule $\Rightarrow$ výsledkem dělení jsou záporná čísla se vzrůstající absolutní hodnotou.
- Když zmenšujeme hodnotu *x* postupně od nuly k -1, dělíme záporné číslo, které se zmenšuje od 0 k -1, záporným číslem, které se zvětšuje od –1 k nule $\Rightarrow$ výsledkem dělení jsou zvětšující se kladná čísla.

Přibližný tvar grafu i grafů všech zmíněných funkcí je vidět na obrázku.



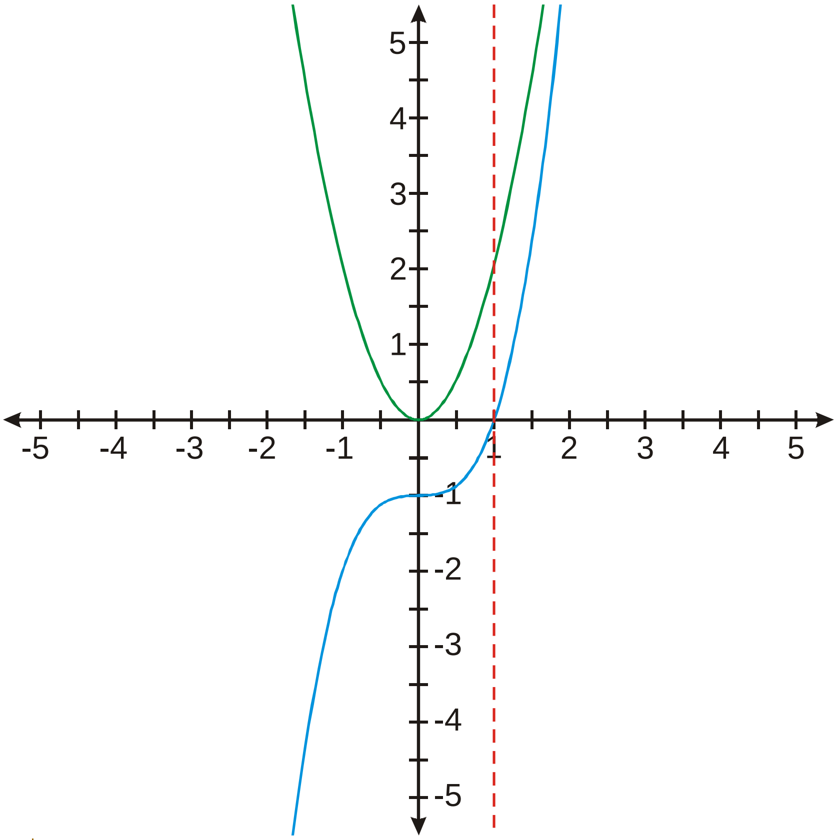
Výsledek můžeme ověřit pomocí počítače: $y_1 = x$, $y_2 = x^2 - 1$, $y_3 = x^3$, $y_4 = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.



Pedagogická poznámka: Opět spíše bonbónek pro zájemce, když jim na konci hodiny zbude čas.

Př. 7: Nakresli přibližný tvar grafu funkce $y=\frac{2x^2}{x^3-1}$.

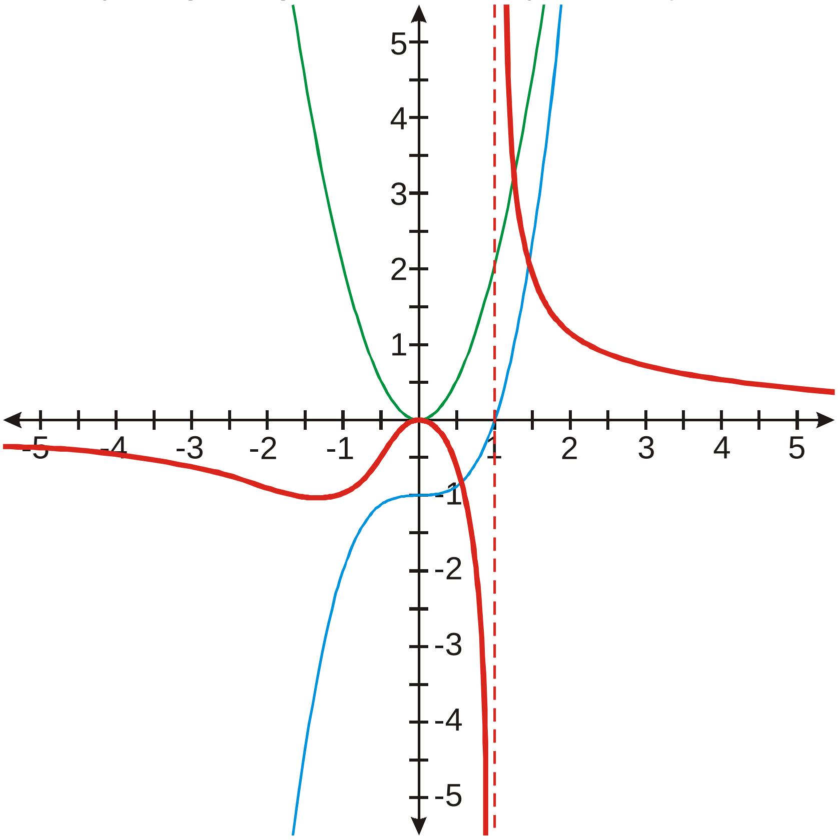
Do obrázku nakreslíme grafy funkcí $y=2x^2$ a $y=x^3-1$. Hodnoty grafu funkce $y=\frac{2x^2}{x^3-1}$ budeme získávat dělením hodnot funkcí $y=2x^2$ a $y=x^3-1$.



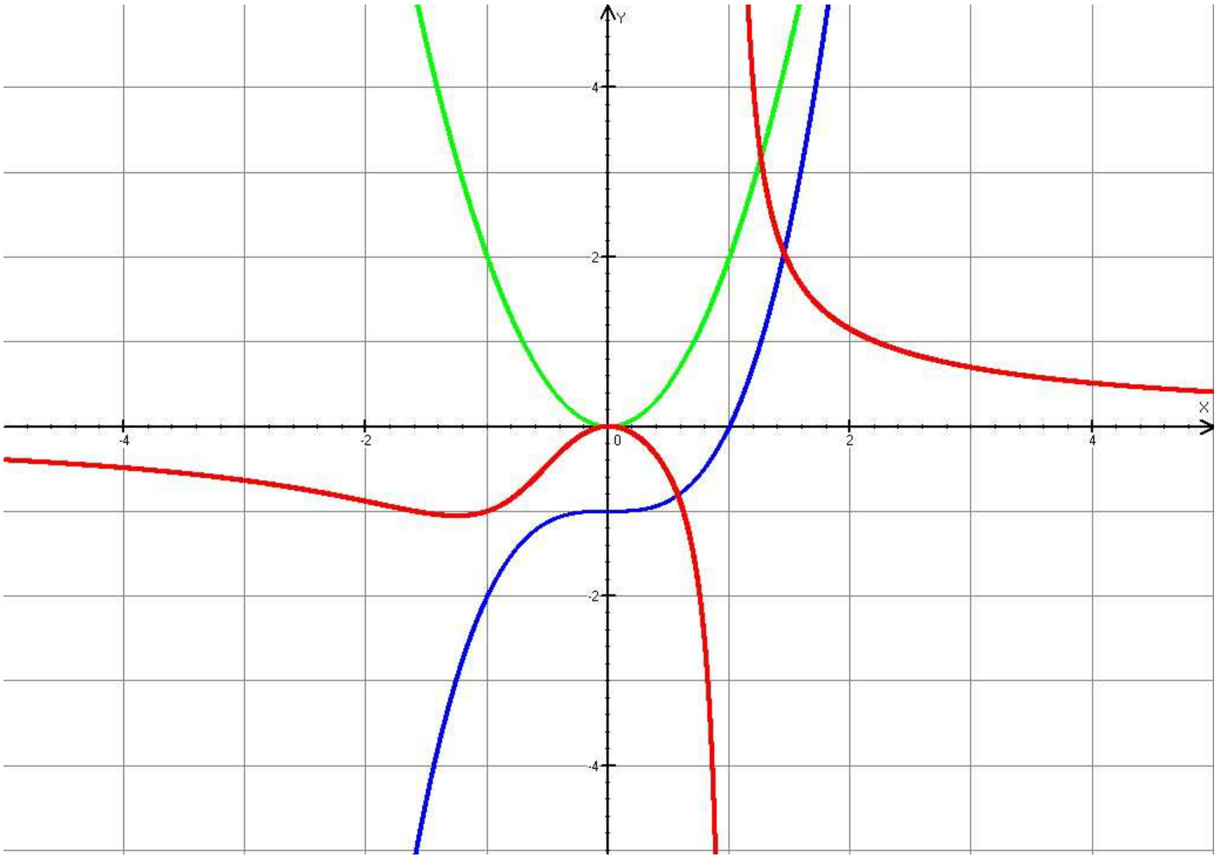
- Funkce $y=\frac{2x^2}{x^3-1}$ nebude mít žádnou hodnotu pro $x=1$ (dělili bychom nulou).
- Pro velká *x* je možné číslo 1 ve jmenovateli zlomku zanedbat a přibližně platí $y=\frac{2x^2}{x^3-1}\doteq\frac{2x^2}{x^3}=\frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ funkce se bude chovat podobně jako funkce $y=\frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ pro *x* blížíce se nekonečnu se budou hodnoty přibližovat nule, stejně tak pro *x* blížící se mínus nekonečnu.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x\in(1;\infty)$. Pro hodnoty blízké 1 dělíme čísla větší než dvě čísly, která se blíží nule $\Rightarrow$ získáváme velmi velká kladná čísla. Pro *x* blížící se k jedničce se křivka bude blížit k plus nekonečnu, pro velká čísla se funkce chová jako funkce $y=\frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ hodnoty se blíží nule.
- Pro $x=0$ dělíme 0 číslem –2 $\Rightarrow$ získáme hodnotu $y=0$.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x\in(0;1)$. Vycházíme z bodu $[0;0]$, postupně dělíme čím dál větší kladná čísla, čím dál menšími zápornými čísly $\Rightarrow$ získané hodnoty se postupně blíží k $-\infty$.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x\in(-\infty;0)$. Vycházíme z bodu $[0;0]$, dělíme kladné hodnoty zeleného grafu, zápornými hodnotami modrého $\Rightarrow$ všechny hodnoty v tomto

intervalu budou záporné. Zelené hodnoty se zpočátku zvětšují rychleji, než klesají modré $\Rightarrow$ zpočátku se bude absolutní hodnota výsledků zvětšovat (graf se vzdaluje od osy *x*), postupně se začnou modré hodnoty zmenšovat rychleji, funkce se začne chovat jako funkce $y = \frac{2}{x}$ a začne se opět blížit k ose *x*.

Přibližný tvar grafu i grafů všech zmíněných funkcí je vidět na obrázku.



Výsledek můžeme ověřit pomocí počítače: $y_1 = x^3 - 1$, $y_2 = 2x^2$, $y_3 = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$.



Shrnutí: